

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- les colonnes sont linéairement indépendantes $\forall \varepsilon$

$$\Rightarrow \text{rang} = 2, \text{ rang plein}$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}(A) = \{0\}$$

$$\Rightarrow R(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow P_{R(A)}^\perp = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0, 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0, 1, 0)$$

$$P_{\mathcal{N}(A)}^\perp = 0$$

SVD de A :

→ diagonalisation de $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 + 1 \end{pmatrix}$

donne les valeurs singulières

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} \pm \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} + 1}$$

→ valeurs propres: Soit $d_{\pm} = \left(\frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} + 1 \right)^{1/2}$

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}}{d_+} & 1/d_+ \\ -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} / d_- & 1/d_- \end{pmatrix}$$

et on peut simplement appliquer la matrice
 A à ces vecteurs pour trouver U

PS: calculs laborieux pour trouver les
vecteurs propres !!

② Nous allons résoudre le cas complexe, plus général. Deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sont unitairement équivalentes ssi $A = Q B Q^H$ pour une certaine matrice $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unitaire.

Est-il vrai en fait que A et B sont unitairement équiv. SSI elles ont les mêmes valeurs singulières ?

$$A, B \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad A = U_1 \Sigma V_1^H \quad B = U_2 \Sigma_2 V_2^H$$

$$A = Q B Q^H$$

et U_1, V_1, U_2, V_2, Q sont unitaires par définition

on veut montrer (on infirmer)

$$A = Q B Q^H \iff \Sigma_1 = \Sigma_2$$

$$\Rightarrow A = U_1 \Sigma_1 V_1^H \quad B = U_2 \Sigma_2 V_2^H$$

$$\Rightarrow U_1 \Sigma_1 V_1^H = Q U_2 \Sigma_2 V_2^H Q^H$$

$$= \underbrace{(Q U_2)}_{\text{unitaire}} \Sigma_2 \underbrace{(V_2^H Q^H)}_{\text{unitaire}} = A$$

or comme les valeurs singulières sont
uniques ceci signifie $\Sigma_1 = \Sigma_2$

($\neq$) FAUX, donnons un contre-exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ont les mêmes valeurs singulières
MAIS ne sont pas unitairement équivalentes

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$A = U \Sigma V^T$$

① Montkney give $\|A\|_2 = \|\Sigma\|_2$

$$\|U \Sigma V^T\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1}$$

$$\|U \Sigma V^T x\|_2 \quad \times$$

$$\sqrt{(U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T x}$$

$$= \sup_{\|x\|_2=1}$$

$$\|\Sigma V^T x\|_2$$

$$x^T V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T x = \sup_{\|y\|_2=1}$$

$$\|\Sigma y\|_2 \stackrel{\text{dy}}{=} \|\Sigma\|_2$$

$$\sqrt{x^T \Sigma^2 x}$$

② Exprime $\|A\|_2$ en fonction des σ_i de A

$$\|A\|_2 = \left\| \sum \|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \right.$$

$$= \sup_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_i \sigma_i^2 x_i^2} = \sigma_{\max} = 1$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sigma_{\max} \\ = \sigma_1$$

③ Soit $A_\varepsilon = U(\Sigma + \varepsilon I_{m \times n})V^T$

$$A \prec U \Sigma V^T$$

- quel est le rang de A_ε

$$A_\varepsilon = U \Sigma_\varepsilon V^T$$

$$\text{rang}(\Sigma_\varepsilon) = \text{rang}(\Sigma + \varepsilon I)$$

$\Rightarrow$ rang plein

Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|A - A_\varepsilon\|_2 = 0$

$$A - A_\varepsilon = U(\Sigma - \Sigma_\varepsilon)V^T$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} = 0$$

$$\|A - A_\varepsilon\|_2 = \|\Sigma - \Sigma_\varepsilon\|_2 = \varepsilon$$